AS-84.3127 Paikannus- ja navigointimenetelmät

Ratkaisut 5.

1. Työkoneeseen vaakasuoraan asennettu kiihtyvyysanturi mittaa maan vetovoiman sini komponenttia.

$a=g*\sin(x_1)$

Tässä *a* on kallistuskulman x_1 aiheuttama maan vetovoiman komponentti.

Kun kallistuskulma on pieni niin $\sin(x_1)\approx x_1$

$x_1\approx a/g$

Kallistuskulma yksikkönä rad on siis suunnilleen yhtä suuri kuin kiihtyvyys yksikkönä g.

$y_1=x_1+v_1$

Tässä v_1 on kiihtyvyyden mittauksen kohina ja sivuttaissuuntaisen lineaarisen kiihtyvyyden summa, jonka varianssia merkitään r_1.

Kallistuskulman derivaatta ajan suhteen on kulmanopeus

$\dot{x}_1=x_2$

Kulmakiihtyvyys on tuntematon satunnaishäiriö w_2

$\dot{x}_2=w_2$

Kulmanopeutta mitattiin yksikkönä rad/s

$y_2=x_2+v_2$

Missä v_2 on kulmanopeuden mittauksen kohina.

Merkitään kulmanopeuden mittauksen kohinan varianssia r_2

Nyt meillä on tilayhtälö ja mittausyhtälö lineaarista Kalman suodinta varten, joka on optimaalinen estimaattori. Diskretoidaan tilayhtälö ja saadaan tilansiirtomatriisi A

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x=A*x$

$P=A*P*A^T+Q$

$K=P*(P+R)^{-1}$

$x=x+K*(y-x)$

$P=P-K*P$

2.
Muodostetaan ensin resiinan tiloille paikka ja nopeus differentiaaliyhtälöt.

$$\dot{x} = v$$
$$\dot{v} = w_2$$

missä w_2 on nollakeskiarvoinen tuntematon häiriö.

Valitaan tilamuuttujiksi paikka x ja nopeus v.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

Lineaarinen tilamalli:

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

Yhtälö on matriisimuodossa:

$$\dot{X} = AX + w$$

Lineaarinen mittausyhtälö:

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

missä r_1 on paikan mittauksen virhe ja r_2 on nopeuden mittauksen virhe.

Yhtälö on matriisimuodossa:

$$Y = CX + r$$

Seuraavaksi diskretoidaan jatkuva tilamalli.

$$X(k+1) = \Phi X(k)$$

missä tilansiirtomatriisi lasketaan sarjakehitelmällä

$$\Phi = e^{Ah} = I + Ah + \frac{A^2 h^2}{2} + \ldots$$

Tässä tapauksessa saadaan:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & h \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

koska näyteväli *h* oli 1 s.

Diskreetti mittausmalli on samanmuotoinen jatkuvan kanssa.

Koko diskreetti malli on siis:

$$X(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$$Y(k) = X(k) + \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

Kovarianssimatriisin diagonaalialkiot ovat keskihajonnan neliöitä. Tilamallin virheen kovarianssi Q ja mittausmallin virheen kovarianssi R saadaan laskettua tällä perusteella.

$$Q = E\left\{ww^T\right\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix}$$

$$R = E\left\{rr^T\right\} = \begin{pmatrix} 10^2 & 0 \\ 0 & 0.1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{pmatrix}$$

Koska A, C, Q ja R ovat vakiomatriiseja niin voidaan suunnitella kiinteän vahvistuksen Kalman suodin. Suotimen vahvistus lasketaan seuraavasti, kun C on yksikkömatriisi:

$$G = P(P+R)^{-1}$$

missä P on tilan ennakon x(k|k-1) kovarianssi. Kovarianssi P lasketaan Riccatin yhtälöstä käyttäen hyväksi tietoa C=I.

$$P = \Phi(P - P(P+R)^{-1} P^T)\Phi^T + Q$$

Yhtälön ratkaiseminen algebrallisesti vaatii ominaisarvojen laskentaa. Helpompi tapa on laskea iteraatiolla seuraavasti:

$$P(i+1) = \Phi(P(i) - P(i)(P(i)+R)^{-1}P^T(i))\Phi^T + Q$$

Iteraatio aloitetaan esimerkiksi arvolla:

$$P(0) = Q$$

Tulokseksi saadaan

$$P = \begin{pmatrix} 1.005 & 0.01 \\ 0.01 & 0.260 \end{pmatrix}$$

Sijoitetaan tämä matriisi estimoinnin vahvistuksen kaavaan ja saadaan

$$G = P(P+R)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.010 & 0.037 \\ 0 & 0.963 \end{pmatrix}$$

Estimointivirheen kovarianssin arvo heti mittauksen päivityksen jälkeen on

$$P_+ = P - P(P+R)^{-1}P^T$$

eli

$$P_+ = \begin{pmatrix} 0.995 & 0.00 \\ 0.00 & 0.01 \end{pmatrix}$$

Paikan x estimointivirheen varianssi on siis 0.995 m^2 ja nopeuden v estimointivirheen varianssi 0.01 m^2/s^2. Ottamalla neliöjuuret näistä arvoista saadaan paikan estimointivirheen keskihajonnaksi 1.0 m ja nopeuden estimointivirheen keskihajonnaksi 0.1m/s. Paikan estimointivirhe on siis kymmenesosa vastaavan mittauksen virheestä ja nopeuden estimointivirhe on yhtä suuri kuin vastaavan mittauksen virhe.

Kiinteän vahvistuksen diskreetiksi Kalman suotimeksi saadaan siis

$$X(k \mid k-1) = \Phi X(k-1 \mid k-1)$$
$$X(k \mid k) = X(k \mid k-1) + G(Y(k) - X(k \mid k-1))$$

3.

a)

Liikemalli:

Periaatteessa liikemalliin kannattaa liittää mahdollisimman paljon aluskohtaista informaatiota. Yksinkertaisiakin yleisiä malleja voidaan käyttää huonomman estimaatin hinnalla. Tässä tapauksessa käytetään yleistä mallia tarkemman tiedon puutteessa. Malli (kaava 1) kuvaa vakionopeudella suoraan liikkuvaa alusta. Aluksen ohjauksia ei tunneta, joten mallissa ei ole sisääntuloa. Kaikki ohjaukset ovat mallin kannalta häiriöitä.

$$f\left(x,y,v,\phi,k\right)=\begin{cases} x\left(k+1\right)=x\left(k\right)+T\left(v\left(k\right)\cos\left(\phi\left(k\right)\right)\right) \\ y\left(k+1\right)=y\left(k\right)+T\left(v\left(k\right)\sin\left(\phi\left(k\right)\right)\right) \\ v\left(k+1\right)=v\left(k\right) \\ \phi\left(k+1\right)=\phi\left(k\right) \end{cases}$$

Mittausmalli:

Mittauksina saadaan kaksi paikkakoordinaattia ja suunta, eli kolme liikemallin tiloista. Paikkakoordinaatit annetaan asteina . Yleensä tilana halutaan käyttää eri mittayksikköä, vaikkapa metriä. Yksi leveysaste vastaa 111.12 km. Yhtä pituusastetta vastaava matka riippuu siitä millä leveysasteella matka kuljetaan. Pienillä siirtymillä voidaan olettaa, että yhtä pituusastetta vastaava matka on cos(leveysaste)* 111.12 km. Tämä on tosin vain approksimaatio,ja suurilla siirtymillä kannattaakin tilasuureet esittää asteissa, jolloin ei tarvita approksimaatiota (itse asiassa tässä tehtävässä tämä vaihtoehto olisi parempi). Jos kuitenkin käytämme paikkakoordinaattien mittayksikkönä metriä saamme seuraavanlaisen mittausyhtälön.

$$h\left(x,y,v,\phi,k\right)=\begin{cases} lat\left(k\right)=\dfrac{x\left(k\right)}{111120}+lat\left(0\right) \\ lon\left(k\right)=\dfrac{y\left(k\right)}{111120\cos\left(lat\left(k\right)\right)}+lon\left(0\right) \\ dir\left(k\right)=\phi\left(k\right) \end{cases}$$

Kuten kaavasta näkyy x-akseli osoittaa pohjoiseen ja y-akseli itään. Koordinaatiston origo on lähtöpaikassa.
Kalman suodatinta varten tarvitsemme vielä tilayhtälön ja mittausyhtälön Jakobiaanit. Eli

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(k+1)}{\partial x(k)} & \frac{\partial x(k+1)}{\partial y(k)} & \frac{\partial x(k+1)}{\partial v(k)} & \frac{\partial x(k+1)}{\partial \phi(k)} \\ \frac{\partial y(k+1)}{\partial x(k)} & \frac{\partial y(k+1)}{\partial y(k)} & \frac{\partial y(k+1)}{\partial v(k)} & \frac{\partial y(k+1)}{\partial \phi(k)} \\ \frac{\partial v(k+1)}{\partial x(k)} & \frac{\partial v(k+1)}{\partial y(k)} & \frac{\partial v(k+1)}{\partial v(k)} & \frac{\partial v(k+1)}{\partial \phi(k)} \\ \frac{\partial \phi(k+1)}{\partial x(k)} & \frac{\partial \phi(k+1)}{\partial y(k)} & \frac{\partial \phi(k+1)}{\partial v(k)} & \frac{\partial \phi(k+1)}{\partial \phi(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T\cos(\phi(k)) & -Tv(k)\sin(\phi(k)) \\ 0 & 1 & T\sin(\phi(k)) & Tv(k)\cos(\phi(k)) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ja

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial lat(k)}{\partial x(k)} & \frac{\partial lat(k)}{\partial y(k)} & \frac{\partial lat(k)}{\partial v(k)} & \frac{\partial lat(k)}{\partial \phi(k)} \\ \frac{\partial lon(k)}{\partial x(k)} & \frac{\partial lon(k)}{\partial y(k)} & \frac{\partial lon(k)}{\partial v(k)} & \frac{\partial lon(k)}{\partial \phi(k)} \\ \frac{\partial dir(k)}{\partial x(k)} & \frac{\partial dir(k)}{\partial y(k)} & \frac{\partial dir(k)}{\partial v(k)} & \frac{\partial dir(k)}{\partial \phi(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{111120} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{111120\cos(lat(0))} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ennakointivirhettä laskettaessa täytyy huomioida suuntakulman epäjatkuvuuskohta 0=360.

Laajennettu Kalman suodin voidaan nyt kirjoittaa. Kerätään yksittäiset tilat vektoriin:

$$x = \begin{pmatrix} x & y & v & \phi \end{pmatrix}^T$$

Tilaestimaatti heti mittauksen päivityksen jälkeen ja vastaava estimointivirheen kovarianssi:

$$x(k|k) = x(k|k-1) + G(k)(y(k) - h(x(k|k-1)))$$
$$G(k) = P(k|k-1)H^T(HP(k|k-1)H^T + R)^{-1}$$
$$P(k|k) = P(k|k-1) - G(k)HP^T(k|k-1)$$

Yhden askeleen ennakoiva tilaestimaatti ja vastaava estimointivirheen kovarianssi:

$$x(k+1|k) = f(x(k|k))$$
$$P(k+1|k) = FP(k|k)FT + Q$$

b)

Mittauskohinan kovarianssi R saadaan GPS vastaanottimen tarkkuudesta. Hyvä arvaus on $R_{11}=(10^{-4})^2$, $R_{22}=(10^{-4})^2$ ja $R_{33}=(10)^2$. Yksikkönä on kulma-asteen neliö. Valitut arvot vastaavat keskihajontaa paikassa 5-11 m ja suuntakulmassa 10 astetta. Varianssien Q_{ii} arvo saadaan vertaamalla innovaatiosignaalin neliösumman keskiarvoa teoreettiseen arvoon

$$(1/n)\Sigma(y(k)-h(x(k|k-1)))(y(k)-h(x(k|k-1)))^T \approx H{*}P{*}H^T+R$$

Diagonaalin ulkopuoliset elementit valitaan nolliksi.

AS-84.3127 Localization and navigation methods

Solutions for exercise 5.

1. Acceleration sensor that is installed horizontally in a work machine measures the sin component of gravity.

$a=g*\sin(x_1)$

Here *a* is the gravity component caused by the roll angle x_1.

When the roll angle is small then $\sin(x_1)\approx x_1$

$x_1 \approx a/g$

The roll angle in rad is approximately equal to acceleration in g.

$y_1=x_1+v_1$

Here v_1 is the sum of measurement noise and sideways linear acceleration. Its variance is marked as r_1.

The time derivative of the roll angle is angular velocity.

$\dot{x}_1=x_2$

The angular acceleration is unknown random variable w_2

$\dot{x}_2=w_2$

The angular velocity measurement unit is rad/s

$y_2=x_2+v_2$

Where v_2 is the angular velocity measurement noise and its variance is marked as r_2.

Now we have state equation and measurement equation for a linear Kalman filter that is optimal estimator. In diskrete form we have

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x=A*x$

$P=A*P*A^T+Q$

$K=P*(P+R)^{-1}$

$x=x+K*(y-x)$

$P=P-K*P$

2.

The differential equations for the handcar position *x* and velocity *v* are as follows:

$$\dot{x} = v$$
$$\dot{v} = w_2$$

where w_2 is unknown zero mean acceleration.

The state vector consists of position *x* and velocity *v*.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

The linear state model:

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

Same in general matrix form without control term:

$$\dot{X} = AX + w$$

Linear measurement equation:

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

where r_1 and r_2 are position and velocity measurement error respectively.

Same in general matrix form:

$$Y = CX + r$$

The discretization of the continuous state model without control term:

$$X(k+1) = \Phi X(k)$$

where the state transition matrix is computed by using series approximation:

$$\Phi = e^{Ah} = I + Ah + \frac{A^2h^2}{2} + ...$$

In this case we obtain,

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & h \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

because the discretization time *h* is equal to 1 s.

The discrete measurement model is similar to the continuous one.

Therefore, the discrete system model is as follows:

$$X(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$$Y(k) = X(k) + \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

The diagonal components of the covariance matrix are variances. Variance is the square of the standard deviation. The state model error covariance Q and measurement model error covariance R can now be obtained as follows

$$Q = E\left\{ww^T\right\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix}$$

$$R = E\left\{rr^T\right\} = \begin{pmatrix} 10^2 & 0 \\ 0 & 0.1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{pmatrix}$$

A constant gain Kalman filter can now be designed because the matrix A, C, Q and R are time invariant. The estimation gain is computed as follows because C is unity matrix:

$$G = P(P+R)^{-1}$$

where P is the covariance of the state prediction estimate x(k|k-1). The covariance of the state prediction estimate is computed by using the following Riccati equation and using the fact C=I:

$$P = \Phi(P - P(P+R)^{-1}P^T)\Phi^T + Q$$

The above equation can be solved algebraic by using eigenvalue techniques. Other possibility is to use iteration over time:

$$P(i+1) = \Phi(P(i) - P(i)(P(i)+R)^{-1}P^T(i))\Phi^T + Q$$

The iteration can be started with the following initial value:

$$P(0) = Q$$

The following result is obtained:

$$P = \begin{pmatrix} 1.005 & 0.01 \\ 0.01 & 0.260 \end{pmatrix}$$

The estimation gain is now obtained:

$$G = P(P+R)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.010 & 0.037 \\ 0 & 0.963 \end{pmatrix}$$

The covariance of the state estimation error after measurement update is computed as follows

$$P_+ = P - P(P+R)^{-1}P^T$$

Solution in numerical form is

$$P_+ = \begin{pmatrix} 0.995 & 0.00 \\ 0.00 & 0.01 \end{pmatrix}$$

Therefore, the variance of the position and velocity estimation error is equal to 0.995 m2 and 0.01 m2/s2, respectively. By taking the square root, the standard deviation of the position and velocity estimation error is equal to 1.0 m and 0.1 m/s, respectively. The position estimation error is ten times smaller than the position measurement error. This is the benefit of using Kalman filter.

The constant gain discrete time Kalman filter:

$$X(k \mid k-1) = \Phi X(k-1 \mid k-1)$$
$$X(k \mid k) = X(k \mid k-1) + G(Y(k) - X(k \mid k-1))$$

3.

a)

Motion model:

In principle, as much information as possible related to the vessel under consideration should be included to the motion model. Even simple, generic models can be used at the cost of a more uncertain estimate. In our case a generic model is used in the absence of specific information concerning the vessel. The model (eq. 1) describes a vessel moving straight ahead with a constant speed. The control input is not known so there is no deterministic control term in the equation. All the control input to the model can be considered as noises from the model point of view.

$$f\left(x, y, v, \phi, k\right) = \begin{cases} x\left(k+1\right) = x\left(k\right) + T\left(v\left(k\right)\cos\left(\phi\left(k\right)\right)\right) \\ y\left(k+1\right) = y\left(k\right) + T\left(v\left(k\right)\sin\left(\phi\left(k\right)\right)\right) \\ v\left(k+1\right) = v\left(k\right) \\ \phi\left(k+1\right) = \phi\left(k\right) \end{cases}$$

Measurement model:

The two position coordinates and the direction angle, i.e. three of the states in the motion model, are used as measurements. Normally, different units (such as meter) are preferred for the state. One degree in latitude direction corresponds to 111.12 km. The distance corresponding to one degree in longitudinal direction depends on the location of the vessel in latitude coordinates. By small traveled distances it can be assumed that the distance corresponding to one degree in longitudinal direction can be approximated with the equation cos(degrees in latitude direction)* 111.12 km. This is only an approximation, and with long traveled distances the state variables should be presented in degrees, in which case no approximation is required (in fact, this alternative would preferable in this example problem). However, when meters are used as units for the location coordinates the following measurement equation is acquired:

$$h(x,y,v,\phi,k)=\begin{cases} lat(k)=\dfrac{x(k)}{111120}+lat(0) \\ lon(k)=\dfrac{y(k)}{111120\cos(lat(k))}+lon(0) \\ dir(k)=\phi(k) \end{cases}$$

As can be seen in the equation, x-axis points towards the north and y-axis towards the east. The origin of the reference frame coincides with the starting location.

$$F=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x(k+1)}{\partial x(k)} & \dfrac{\partial x(k+1)}{\partial y(k)} & \dfrac{\partial x(k+1)}{\partial v(k)} & \dfrac{\partial x(k+1)}{\partial \phi(k)} \\ \dfrac{\partial y(k+1)}{\partial x(k)} & \dfrac{\partial y(k+1)}{\partial y(k)} & \dfrac{\partial y(k+1)}{\partial v(k)} & \dfrac{\partial y(k+1)}{\partial \phi(k)} \\ \dfrac{\partial v(k+1)}{\partial x(k)} & \dfrac{\partial v(k+1)}{\partial y(k)} & \dfrac{\partial v(k+1)}{\partial v(k)} & \dfrac{\partial v(k+1)}{\partial \phi(k)} \\ \dfrac{\partial \phi(k+1)}{\partial x(k)} & \dfrac{\partial \phi(k+1)}{\partial y(k)} & \dfrac{\partial \phi(k+1)}{\partial v(k)} & \dfrac{\partial \phi(k+1)}{\partial \phi(k)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & T\cos(\phi(k)) & -Tv(k)\sin(\phi(k)) \\ 0 & 1 & T\sin(\phi(k)) & Tv(k)\cos(\phi(k)) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

and

$$H=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial lat(k)}{\partial x(k)} & \dfrac{\partial lat(k)}{\partial y(k)} & \dfrac{\partial lat(k)}{\partial v(k)} & \dfrac{\partial lat(k)}{\partial \phi(k)} \\ \dfrac{\partial lon(k)}{\partial x(k)} & \dfrac{\partial lon(k)}{\partial y(k)} & \dfrac{\partial lon(k)}{\partial v(k)} & \dfrac{\partial lon(k)}{\partial \phi(k)} \\ \dfrac{\partial dir(k)}{\partial x(k)} & \dfrac{\partial dir(k)}{\partial y(k)} & \dfrac{\partial dir(k)}{\partial v(k)} & \dfrac{\partial dir(k)}{\partial \phi(k)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{111120} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{111120\cos(lat(0))} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

For the prediction error the point of discontinuity of the orientation angle at 0=360 have to be considered.

Lets collect the individual states to a vector:

$$x=\begin{pmatrix} x & y & v & \phi \end{pmatrix}^T$$

The extended Kalman filter is now obtained. The corrector estimate and its error covariance

$$x(k \mid k) = x(k \mid k-1) + G(k)(y(k) - h(x(k \mid k-1)))$$
$$G(k) = P(k \mid k-1)H^T (HP(k \mid k-1)H^T + R)^{-1}$$
$$P(k \mid k) = P(k \mid k-1) - G(k)HP^T (k \mid k-1)$$

The predictor estimate and its error covariance

$$x(k+1 \mid k) = f(x(k \mid k))$$
$$P(k+1 \mid k) = FP(k \mid k)FT + Q$$

b)

The measurement covariance R is obtained from the GPS measurement accuracy. A good guess could be $R_{11}=(10^{-4})^2$, $R_{22}=(10^{-4})^2$ ja $R_{33}=(10)^2$. The units are degrees^2. These values correspond to standard deviation in position about 5-11 m and in direction 10 degrees. The system model variances Q_{ii} can be obtained by comparing the mean value of the square sum of innovation signal to its theoretical value

$(1/n)\Sigma(y(k)-h(x(k|k-1)))(y(k)-h(x(k|k-1)))^T \approx H*P*H^T+R$

The off-diagonal elements are chosen to be zero.