AS-84.3127 Paikannus- ja navigointimenetelmät

Ratkaisut 3.

1)

Kun tiedetään pelkästään etäisyys tunnetusta kohteesta saadaan mahdollinen olinpaikka rajattua ympyrälle, jonka keskipiste on kohteen paikka ja säde juuri mitattu etäisyys. Kun havaitaan etäisyys kahteen tunnettuun kohteeseen saadaan paikka rajattua kahden muodostuneen ympyrän kahteen leikkauspisteeseen. Periaatteessa, mikäli kohteita olisi enemmän, saataisiin paikka ratkaistua yksiselitteisesti. Käytännössä mittauskohinan takia useammat ympyrät eivät leikkaa toisiaan samassa pisteessä. Tällöin ratkaisu saadaan epälineaarisesta pienimmän neliösumman tehtävästä, joka voidaan ratkaista optimointialgoritmilla, esim Levenberg-Marquard:lla. Tämän tyyppiset algoritmit tarvisevat kuitenkin hyvän alkuarvauksen paikalle, jotta globaalioptimi, eli oikea paikka, löytyy. Alkuarvaus voidaan saada vaikka ratkaisemalla analyyttisesti paikka kahdelle kohteelle.

Paikan määrittämiseksi tarvitaan etäisyys ja kulma tunnettuun kohteeseen. Etäisyys on tässä tapauksessa jo mitattu, joten tarvitaan vielä kulma. Se saadaan kun huomataan, että kahden kohteen tapauksessa kummatkin kohteen ja havatsijan paikat muodostavat kolmion, jonka sivuina ovat mitatut etäisyydet kumpaankin kohteeseen sekä kohteiden välinen tunnettu etäisyys. Kun kolmion sivut tunnetaan myös kulmat voidaan ratkaista.

Merkitään kohteiden välistä etäisyyttä d_3:lla.

$$d_3 = \sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2}$$

Kosinilauseesta saamme d_1:n ja d_3:n välisen kulman.

$$d_2^2 = d_1^2 + d_3^2 - 2d_1 d_3 \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{d_1^2 + d_3^2 - d_2^2}{2d_1 d_3}\right) \qquad (1)$$

lasketaan vielä d_3:n suunta

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) \qquad (2)$$

tällöin paikka voidaan ratkaista

$$x_r = x_1 + d_1 \cos(\theta - \alpha) \quad (3)$$
$$y_r = y_1 + d_1 \sin(\theta - \alpha) \quad (4)$$

sijoitetaan nyt annetut arvot yhtälöihin(1-2) ja saadaan

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{10.05^2 + \left((1+1)^2 + (10-10)^2\right) - 10.05^2}{2 \cdot 10.05 \cdot 2}\right) = 1.4711\text{rad}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{10.0 - 10.0}{1+1}\right) = 0$$

tämän jälkeen voidaan laskea paikka

$$x_r = -1 + 10.05\cos(0 - 1.4711) = 0$$
$$y_r = 10.0 + 10.05\sin(0 - 1.4711) = 0$$

Laskemalla samoin virheellisellä lukemalla saadaan

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{10.05^2 + \left((1+1)^2 + (10-10)^2\right) - 9.95^2}{2 \cdot 10.05 \cdot 2}\right) = 1.4210\text{rad}$$
$$x_r = -1 + 10.05\cos(0 - 1.4210) = 0.5$$
$$y_r = 10.0 + 10.05\sin(0 - 1.4210) = 0.063$$

eli

$$x_{dop} = 0.5 / 0.1 = 5$$

$$y_{dop} = 0.063 / 0.1 = 0.63$$

2.

Kun pelkästään kulma kahteen kohteeseen tunnetaan on paikka rajattu ympyrän kaarelle. Eli kun havaitaan kulmat useampaan kohdepariin saadaan useampia ympyrärajoitteita joiden leikkauspisteistä löytyy mahdollinen ratkaisu, samoin kuin edellisessä tehtävässä. Erona on se että emme suoraan saa ympyröiden sädettä ja ympyrät kulkevat tällä kertaa kohteiden kautta.

Yksi ratkaisu on laskea ympyröiden säteet ja keskipisteet ja sen jälkeen ratkaista leikkauspiste kuten edellisessä kohdassa.

Seuraavassa käytetään hyväksi kahta tulosta:

> Jos kohdeparin muodostama kulma ympyrän reunalta katsottuna on α niin saman kohdeparin välinen kulma katsottuna ympyrän keskipisteestä on 2α .
>
> Segmentin pituus $x = 2r\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, missä r on ympyrän säde ja θ on vastaavan sektorin kulma.

Näitä tuloksia hyväksi käyttäen voidaan laskea ympyrän säde $r = \frac{x}{2\sin(\alpha)}$, missä x on kohdeparin välinen etäisyys, ja keskipisteen paikka on

$$x_{12} = x_1 + r_{12}\cos\left(\theta_{12} - \frac{180 - 2\alpha_{12}}{2}\right)$$
$$y_{12} = y_1 + r_{12}\sin\left(\theta_{12} - \frac{180 - 2\alpha_{12}}{2}\right)$$
$$\theta_{12} = \tan^{-1}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$$

kun sama tehdään toiselle kohdeparille olemme suunnilleen samassa tilanteessa kuin edellisen tehtävän alussa. Seuraavaksi ratkaistaan leikkauspiste.

$$d_1 = |r_{12}|$$
$$d_2 = |r_{23}|$$
$$d_3 = \sqrt{(x_{12} - x_{23})^2 + (y_{12} - y_{23})^2}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{d_1^2 + d_3^2 - d_2^2}{2d_1 d_3}\right)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y_{23} - y_{12}}{x_{23} - x_{12}}\right)$$

ja

$$x_r = x_{12} + d_1\cos(\theta - \alpha)$$
$$y_r = y_{12} + d_1\sin(\theta - \alpha)$$

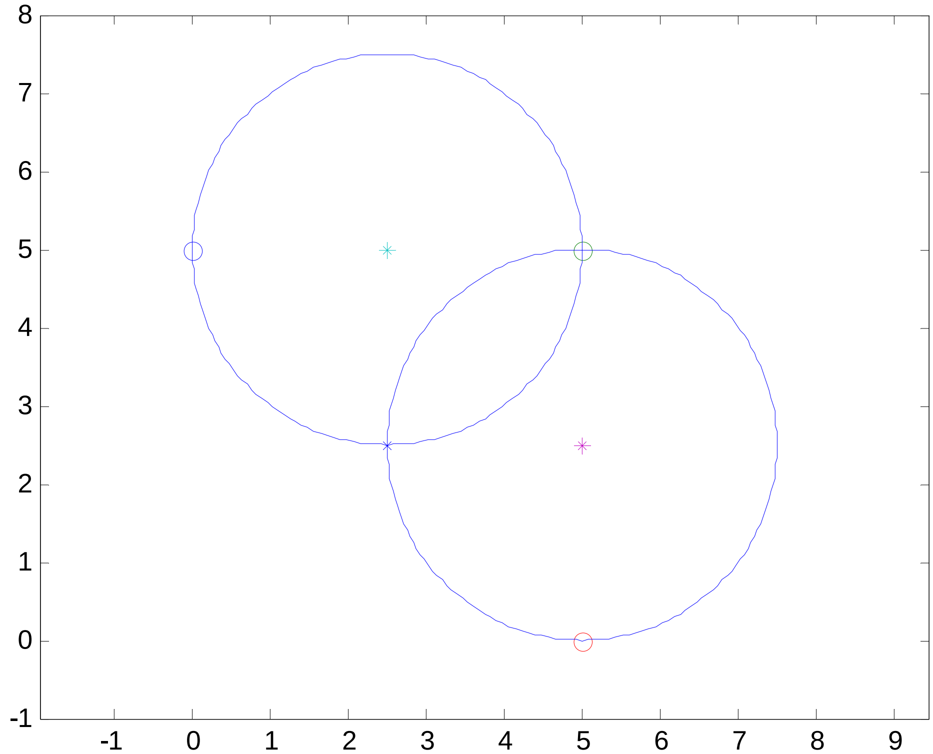
kun näihin yhtälöihin sijoitetaan annetut numeroarvot saadaan

$x_r = 2.5$

$y_r = 2.5$

$\theta = 45$

sama näkyy alla olevassa kuvassa. Siinä majakat on merkitty pienillä tyhjillä ympyröillä, suuremmat ympyrät vastaavat kukin yhden kulmamittauksen aiheuttamaa rajoitetta. Oikea paikka löytyy kahden ympyrän leikkauspisteessä.



AS-84.3127 Localization and navigation methods

Solutions for exercise 3.

1)

When only the distance to a known target location is available, the location of the sensor can be restricted to a circle segment, the center of which is the known location and radius the measured distance. When distances to two known locations are observed the location of the sensor is restricted to the two intersection positions of the circle segments. In principle, when observation to more known locations would be available the location of the sensor could be solved uniquely. In practice, due to sensor noise, the circles do not intersect in a single position. In this case the problem can be formulated as a non-linear least squares problem, which can be solved e.g. with the Levenberg-Marquard optimization algorithm. However, these kinds of algorithms require a good initial guess for the location in order to converge to the correct location (global optimum). The initial guess can be acquired, for example, by solving analytically the sensor location by means of two known sensor locations.

In order to determine the sensor location, both distance and angle to a known location are required. In our case we have the distance but the angle is still needed. The angle can be acquired by observing that in case of two known target locations both locations and the observer form a triangle the sides of which equal the measured distances to both target locations and the mutual distance between the known target locations.

Let's mark the distance between the known locations of the targets by d_3.

$$d_3 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

From the cosine law we get the angle between d_1 and d_3.

$$\begin{aligned} d_2^2 &= d_1^2 + d_3^2 - 2d_1 d_3 \cos(\alpha) \\ \Rightarrow \alpha &= \cos^{-1}\left(\frac{d_1^2 + d_3^2 - d_2^2}{2d_1 d_3}\right) \end{aligned} \qquad (1)$$

let's calculate also the direction of d_3

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) \qquad (2)$$

then the location of the sensor can be solved

$$x_r = x_1 + d_1 \cos(\theta - \alpha) \tag{3}$$

$$y_r = y_1 + d_1 \sin(\theta - \alpha) \tag{4}$$

let's now assign the given values to the equations (1-2) which yields

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{10.05^2 + \left((1+1)^2 + (10-10)^2\right) - 10.05^2}{2 \cdot 10.05 \cdot 2}\right) = 1.4711\text{rad}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{10.0-10.0}{1+1}\right) = 0$$

now we can calculate the sensor location

$$x_r = -1 + 10.05\cos(0 - 1.4711) = 0$$

$$y_r = 10.0 + 10.05\sin(0 - 1.4711) = 0$$

Similarly, by assigning the faulty value we get

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{10.05^2 + \left((1+1)^2 + (10-10)^2\right) - 9.95^2}{2 \cdot 10.05 \cdot 2}\right) = 1.4210\text{rad}$$

$$x_r = -1 + 10.05\cos(0 - 1.4210) = 0.5$$

$$y_r = 10.0 + 10.05\sin(0 - 1.4210) = 0.063$$

that is

$$x_{dop} = 0.5 / 0.1 = 5$$

$$y_{dop} = 0.063 / 0.1 = 0.63$$

2.

When only the angles to known targets are observed, the location of the observer (i.e. sensor) is restricted to a circle arc segment. Consequently, when several pairs of targets are observed, several circle arc segments are acquired. The possible solution for the location of the observer can then be found from their intersection positions, similarly as in the previous problem. The only difference is that we do not directly get the radius of the circles and that the locations of the targets are on the circle arc segments.

One way to solve the problem is to first calculate the radiuses and the center points of the circles and after that calculate their intersection point as in the previous section.

The following two results will be utilized:

> If the angle of the target pair seen from the circle border is α then the angle formed by the same target pair seen from the center of the circle is 2α.
>
> Length of the segment is $x = 2r\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, where r is the radius of the circle and θ is the angle of the corresponding sector.

By utilizing these results the radius of the circle can be computed $r = \frac{x}{2\sin(\alpha)}$, where x is the mutual distance within the target pair and location of the center point is

$$x_{12} = x_1 + r_{12}\cos\left(\theta_{12} - \frac{180 - 2\alpha_{12}}{2}\right)$$
$$y_{12} = y_1 + r_{12}\sin\left(\theta_{12} - \frac{180 - 2\alpha_{12}}{2}\right)$$
$$\theta_{12} = \tan^{-1}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$$

when this is done also for another target pair we are approximately at the same situation as in the beginning of the previous problem. So we proceed by solving for the circle intersection i.e. the robot pose:

$$d_1 = |r_{12}|$$
$$d_2 = |r_{23}|$$
$$d_3 = \sqrt{(x_{12} - x_{23})^2 + (y_{12} - y_{23})^2}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{d_1^2 + d_3^2 - d_2^2}{2d_1d_3}\right)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y_{23} - y_{12}}{x_{23} - x_{12}}\right)$$

and

$$x_r = x_{12} + d_1 \cos(\theta - \alpha)$$
$$y_r = y_{12} + d_1 \sin(\theta - \alpha)$$

when the given numerical values are assigned to these equations we get

$$x_r = 2.5$$
$$y_r = 2.5$$
$$\theta = 45$$

The same can be seen in the figure below. In the figure the beacons have been marked with small empty dots. The large circles correspond each the constraint of a single angle measurement. The correct sensor location can be found at the intersection point of the two circles.