AS-84.3127 Paikannus- ja navigointimenetelmät

Ratkaisut 2.

1.

a)
Kun kuvan ajoneuvon kumpaakin pyörää pyöritetään tasaisella nopeudella, ajoneuvon rata on ympyränkaaren segmentin muotoinen. Hitaammin kulkeva pyörä kulkee matkan $s_1 = v_1 t$ ja nopeampi vastaavasti matkan $s_2 = v_2 t$. Jos hitaamman pyörän kääntymisäde on r niin nopeamman pyörän kääntymissäde on $r + d$. Ympyräsegmentin kulma on

$$\theta = \frac{s_1}{r} = \frac{s_2}{r + d} \tag{1}$$

Ratkaistaan ensin sisemmän pyörän kääntösäde.

$$s_1 r + s_1 d = s_2 r$$

eli

$$\frac{s_1 d}{s_2 - s_1} = r$$

Kulma saadaan sijoittamalla r:n ratkaisu kaavaan (1) eli

$$\theta = \frac{s_1 \left(s_2 - s_1 \right)}{s_1 d} = \frac{v_2 t - v_1 t}{d} \tag{2}$$

Huom. tämä kulma on yhtä suuri kuin ohjauskulman muutos.

lasketaan ajoneuvon keskipisteen ympyräkaaren jänteen pituus

$$h = 2\left(r + \frac{d}{2} \right) \sin\left(\frac{\theta}{2} \right) \tag{3}$$

tästä voidaan laskea ajoneuvon siirtymä x suuntaan (huomaa liikesuunta)

$$x = h \cos\left(\phi + \frac{\theta}{2} \right) = 2\left(r + \frac{d}{2} \right) \sin\left(\frac{\theta}{2} \right) \cos\left(\phi + \frac{\theta}{2} \right)$$

$$x = 2\left(\frac{ds_2 + ds_1}{2s_2 - 2s_1} \right) \sin\left(\frac{s_2 - s_1}{2d} \right) \cos\left(\phi + \frac{s_2 - s_1}{2d} \right) \tag{4}$$

ja y suuntaan

$$y = h\sin\left(\phi + \frac{\theta}{2}\right) = 2\left(r + \frac{d}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\phi + \frac{\theta}{2}\right)$$

$$y = 2\left(\frac{ds_2 + ds_1}{2s_2 - 2s_1}\right)\sin\left(\frac{s_2 - s_1}{2d}\right)\sin\left(\phi + \frac{s_2 - s_1}{2d}\right) \qquad (5)$$

Sijoitetaan $s_i = v_i * t$ yhtälöön (4) ja derivoidaan t:n suhteen saadaan

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \left(\frac{dv_2 + dv_1}{2v_2 - 2v_1} \cdot \frac{(v_2 - v_1)}{2d}\right)\left[\cos\left(\frac{(v_2 - v_1)t}{2d}\right)\cos\left(\phi + \frac{(v_2 - v_1)t}{2d}\right) - \sin\left(\frac{(v_2 - v_1)t}{2d}\right)\sin\left(\phi + \frac{(v_2 - v_1)t}{2d}\right)\right]$$

sievennetään

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \left(\frac{v_2 + v_1}{2}\right)\cos\left(\frac{(v_2 - v_1)t}{2d}\right)\cos\left(\phi + \frac{(v_2 - v_1)t}{2d}\right) - \left(\frac{v_2 + v_1}{2}\right)\sin\left(\frac{(v_2 - v_1)t}{2d}\right)\sin\left(\phi + \frac{(v_2 - v_1)t}{2d}\right)$$

ja edelleen kun t lähenee nollaa

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \left(\frac{v_2 + v_1}{2}\right)\cos(\phi)$$

lasketaan samoin y suuntaan

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \left(\frac{v_2 + v_1}{2}\right)\cos\left(\frac{(v_2 - v_1)t}{2d}\right)\sin\left(\phi + \frac{(v_2 - v_1)t}{2d}\right) + \left(\frac{v_2 + v_1}{2}\right)\sin\left(\frac{(v_2 - v_1)t}{2d}\right)\cos\left(\phi + \frac{(v_2 - v_1)t}{2d}\right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \left(\frac{v_2 + v_1}{2}\right)\sin(\phi)$$

kun vielä (2) derivoidaan ajan suhteen saadaan

$$\dot{\phi} = \frac{v_2 - v_1}{d}$$

eli

$$\begin{cases} \dot{x} = \left(\dfrac{v_2 + v_1}{2} \right) \cos(\phi) \\ \dot{y} = \left(\dfrac{v_2 + v_1}{2} \right) \sin(\phi) \\ \qquad \dot{\phi} = \dfrac{v_2 - v_1}{d} \end{cases} \qquad (6)$$

b)

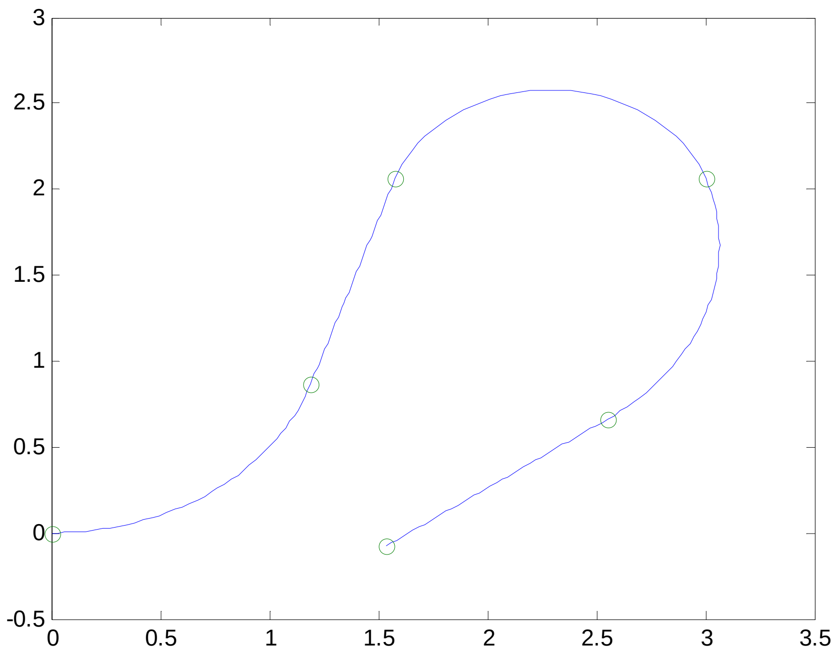
Ajoneuvon pyörien pyörimistä vastaavat siirtymät x- ja y-suuntaan sekä ohjauskulman muutokset saadaan kaavoista (4), (5) ja (2). Kaavoissa (4) ja (5) on ongelmana se, että suoraan liikuttaessa kääntösäde on ääretön. Tässä tapauksessa, eli kun kummatkin pyörät pyörivävät saman verran, voidaan on kulmamuutos nolla ja kaava (3) voidaan korvata vaikka s_1:llä.

Lasketaan ensin pyörien kulkemat matkat: saadaan (Left/Right): (1.2566, 1.8850), (1.2566, 1.2566), (2.5133, 1.2566), (1.8850, 1.2566), (1.2566, 1.2566).

Sijoitetaan nämä arvot kaavoihin ja saadaan

t	x	y	ϕ
1	1.888	0.8637	1.2566
2	1.5771	2.0589	1.2566
3	3.0037	2.0589	-1.2566
4	2.5496	0.6613	-2.5133
5	1.5330	-0.0773	-2.5133

Toinen ratkaisutapa olisi integroida ajoneuvomallin differentiaaliyhtälöitä (6). Alla olevassa kuvassa jatkuva viiva on ajoneuvon integroimalla laskettu rata ja avoimet ympyrät ovat yllälaskettuja reittipisteitä.



Kuva: Ajoneuvon rata, reittipisteet on merkitty ympyröillä.

2.

Merkitään takapyörien suuntakulmaa ϕ:llä, tarvitsemme yhtälöt sille sekä takapyörien akselin keskipisteen x- ja y-koordinaateille. Ohjauksena on ohjauskulma θ ja etuakselin nopeus v.

Etuakselin liike voidaan jakaa takapyörien kulkusuunnan suuntaiseksi komponentiksi $v_1 = v\cos(\theta)$ ja kohtisuoraksi komponentiksi $v_2 = v\sin(\theta)$. Koska oletamme että pyörät eivät liu'u, takapyörät liikkuvat kulkusuuntaan nopeudella v_1. Kohtisuora nopeus komponentti kääntää ajoneuvoa.

Näin saamme ajoneuvolle mallin

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos(\phi)\cos(\theta) \\ \dot{y} = v\sin(\phi)\cos(\theta) \\ \dot{\phi} = \dfrac{v\sin(\theta)}{l} \end{cases}$$

AS-84.3127 **Localization and navigation methods**

Solutions for exercise 2.

1.

a)
When both wheels of the vehicle are rotated with a constant speed the traveled path of the vehicle equals a circular segment. The slower wheel travels a distance $s_1 = v_1 t$ and the faster wheel a distance $s_2 = v_2 t$. When the turning radius of the slower wheel is r then the turning radius of the faster wheel is $r + d$. The angle of the circle segment is given by

$$\theta = \frac{s_1}{r} = \frac{s_2}{r+d} \qquad (1)$$

Let's solve the turning radius of the inner wheel first:

$$s_1 r + s_1 d = s_2 r$$

which is

$$\frac{s_1 d}{s_2 - s_1} = r$$

The angle is given by assigning the solution of r to equation (1).

$$\theta = \frac{s_1 (s_2 - s_1)}{s_1 d} = \frac{v_2 t - v_1 t}{d} \qquad (2)$$

Note that this angle is equal to the change in the steering angle.

Let's calculate the length of the chord of the circle segment

$$h = 2\left(r + \frac{d}{2} \right) \sin\left(\frac{\theta}{2} \right) \qquad (3)$$

this can be used to calculate the displacement of the vehicle to the x direction (notice the direction of motion)

$$x = h \cos\left(\phi + \frac{\theta}{2} \right) = 2\left(r + \frac{d}{2} \right) \sin\left(\frac{\theta}{2} \right) \cos\left(\phi + \frac{\theta}{2} \right)$$

$$x = 2\left(\frac{ds_2 + ds_1}{2s_2 - 2s_1}\right)\sin\left(\frac{s_2 - s_1}{2d}\right)\cos\left(\phi + \frac{s_2 - s_1}{2d}\right) \qquad (4)$$

and to the y-direction

$$y = h\sin\left(\phi + \frac{\theta}{2}\right) = 2\left(r + \frac{d}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\phi + \frac{\theta}{2}\right)$$
$$y = 2\left(\frac{ds_2 + ds_1}{2s_2 - 2s_1}\right)\sin\left(\frac{s_2 - s_1}{2d}\right)\sin\left(\phi + \frac{s_2 - s_1}{2d}\right) \qquad (5)$$

Writing $s_i=v_i*t$ and deriving (4) with respect to *t* yields

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \left(\frac{dv_2 + dv_1}{2v_2 - 2v_1}\cdot\frac{(v_2 - v_1)}{2d}\right)\left[\cos\left(\frac{(v_2 - v_1)t}{2d}\right)\cos\left(\phi + \frac{(v_2 - v_1)t}{2d}\right) - \sin\left(\frac{(v_2 - v_1)t}{2d}\right)\sin\left(\phi + \frac{(v_2 - v_1)t}{2d}\right)\right]$$

which can be simplified

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \left(\frac{v_2 + v_1}{2}\right)\cos\left(\frac{(v_2 - v_1)t}{2d}\right)\cos\left(\phi + \frac{(v_2 - v_1)t}{2d}\right) - \left(\frac{v_2 + v_1}{2}\right)\sin\left(\frac{(v_2 - v_1)t}{2d}\right)\sin\left(\phi + \frac{(v_2 - v_1)t}{2d}\right)$$

and further when *t* approaches zero

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \left(\frac{v_2 + v_1}{2}\right)\cos(\phi)$$

Let’s calculate in the same way for the y direction

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \left(\frac{v_2 + v_1}{2}\right)\cos\left(\frac{(v_2 - v_1)t}{2d}\right)\sin\left(\phi + \frac{(v_2 - v_1)t}{2d}\right) + \left(\frac{v_2 + v_1}{2}\right)\sin\left(\frac{(v_2 - v_1)t}{2d}\right)\cos\left(\phi + \frac{(v_2 - v_1)t}{2d}\right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \left(\frac{v_2 + v_1}{2}\right)\sin(\phi)$$

further, when (2) is derived w.r.t. time the following is acquired

$$\dot{\phi} = \frac{v_2 - v_1}{d}$$

which is

$$\begin{cases} \dot{x} = \left(\dfrac{v_2 + v_1}{2}\right)\cos(\phi) \\ \dot{y} = \left(\dfrac{v_2 + v_1}{2}\right)\sin(\phi) \\ \dot{\phi} = \dfrac{v_2 - v_1}{d} \end{cases} \qquad (6)$$

b)
Displacement in x and y directions corresponding to the rotation of the wheels and the changes in the steering angle can be computed from the equations (4), (5) and (2).
The equations (4) and (5) have the caveat, that when moving forward turning radius goes to infinity. In this case when both wheels rotate equally the angular change is zero and equation (3) can be replaced, for example, by s_1.

Let's first calculate the traveled distances of the wheels: (Left/Right): (1.2566, 1.8850), (1.2566, 1.2566), (2.5133, 1.2566), (1.8850, 1.2566), (1.2566, 1.2566).

Assigning these values to the equations yields:

t	x	y	ϕ	
1	1.888	0.8637	1.2566 rad	72 deg
2	1.5771	2.0589	1.2566	72
3	3.0037	2.0589	-1.2566	-72
4	2.5496	0.6613	-2.5133	-144
5	1.5330	-0.0773	-2.5133	-144

Another way to solve the problem would be related to the integration of the differential equations of the vehicle model (6). In the following figure the continuous line equals the path of the vehicle, which was computed by integrating the differential equations and the dots equal the route positions computed above.

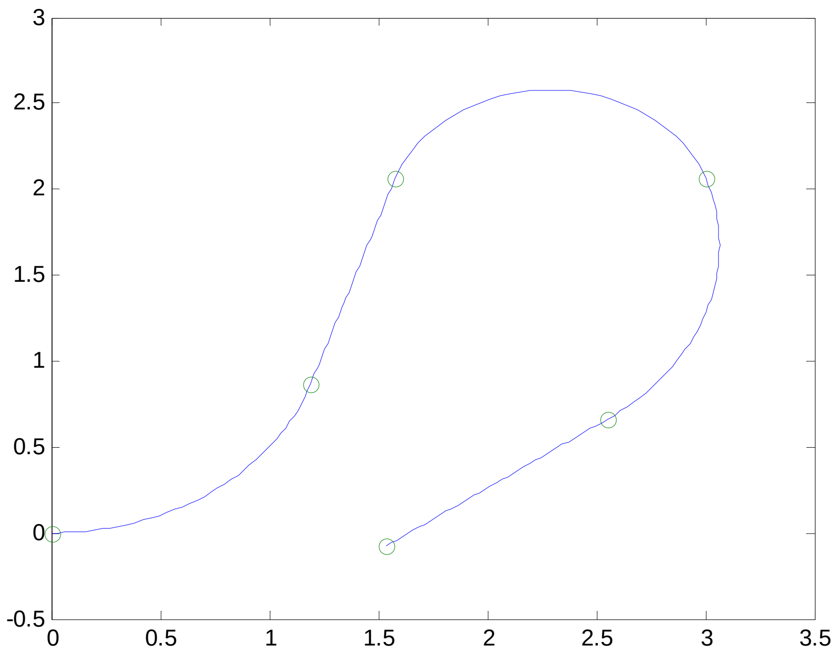


Figure: The vehicle path, route positions have been marked with the dots.

2.

Let's mark the direction angle of the rear wheels with ϕ, we need equations for it and for the x and y coordinates of the middle point on the rear axle. Control input equals the steering angle θ and speed of the front axle v.

The motion of the front axle can be divided into two components: one along the direction of motion of the back wheels $v_1 = v\cos(\theta)$ and one perpendicular to it $v_2 = v\sin(\theta)$. Because we assume that the wheels do not slip, the rear wheels move into the direction of motion with speed v_1. The perpendicular velocity component turns the vehicle.

So, we get the following model for the vehicle

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos(\phi)\cos(\theta) \\ \dot{y} = v\sin(\phi)\cos(\theta) \\ \dot{\phi} = \dfrac{v\sin(\theta)}{l} \end{cases}$$